VON DER KLASSISCHEN LOGIK ZUR MODALLOGIK

J.Czermak

Will man Schülern oder Studenten die Wahrheitstafel für die materiale Implikation "Wenn A, dann B" - kurz: (A → B) -

(1)

A	B	(A → B)
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

W ... wahr
F ... falsch

erklären, gerät man leicht in eine gewisse Verlegenheit[1]. Man kann natürlich Beispiele umgangssprachlicher Wenn-dann-Sätze angeben, die eine solche Verteilung der beiden "Wahrheitswerte" W und F nahelegen, aber eben auch Gegenbeispiele wie etwa "Wenn Homer gelebt hat, dann hat es auch Troja gegeben" oder "Wenn die Venus einen Mond hat, dann auch Pluto" - sollen diese Sätze einfach schon deswegen wahr sein, weil es Troja gegeben hat und die Venus keinen Mond hat? - ganz abgesehen von Beispielen wie "Wenn Hannibal Rom erobert hat, dann besteht der Mond aus Schimmelkäse". Andrerseits fällt es nicht so schwer, die Wahrheitstafeln für die Negation "nicht A" (kurz: ¬A) und die Konjunktion "A und B" (kurz: (A ∧ B)) zu motivieren; jene für "A oder B" (kurz: (A ∨ B)) und "entweder A oder B" kann man dazu benützen, den im Deutschen etwas verwischten Unterschied zwischen ausschließendem und nicht ausschließendem Oder zu verdeutlichen (ein Hinweis aufs Lateinische ist ggfs. nützlich):

A	¬A
W	F
F	W

A	B	(A ∧ B)	(A ∨ B)	Entweder A oder B
W	W	W	W	F
W	F	F	W	W
F	W	F	W	W
F	F	F	F	F

Die Schwierigkeiten bei der Motivation der Wahrheitstafeln sind bei der Implikation besonders deutlich, treten aber auch bei "nicht", "und" und "oder" auf. (So kann z.B. von den beiden Sätzen "Emil heiratete und wurde reich" und "Emil wurde reich und heiratete" der eine wahr, der andere falsch sein.) Diese Probleme beruhen auf dem *Extensionalitätsprinzip* (bei Aussagen: man betrachtet nur deren Wahrheitswert, nicht ihren "Sinn") und dem *Zweiwertigkeitsprinzip* (es gibt genau zwei Wahrheitswerte, nämlich W und F). Da die Einteilung der Aussagen in wahre und falsche auf Aristoteles zurückgeht, nennt man die Logik, die von diesen Voraussetzungen ausgeht, "klassisch", auch wenn sie in vollem Umfang erst in den letzten hundert Jahren entwickelt wurde und das Kernstück der modernen Logik darstellt. Im Anschluß daran nennt man jene Mathematik "klassisch", in der mathematische Aussagen als entweder wahr oder falsch betrachtet werden (im Gegensatz dazu steht in der konstruktiven oder intuitionistischen Mathematik die Beweisbarkeit bzw. Widerlegbarkeit mathematischer Aussagen im Vordergrund). Der klassische Standpunkt ist meist - mehr oder weniger bewußt - mit einer Art platonischer Ontologie verknüpft (mathematische Gegenstände wie Mengen oder Zahlen existieren unabhängig vom Mathematiker, der sie "entdeckt", nicht "konstruiert"). Der weitaus überwiegende Teil der derzeit an deutschsprachigen Universitäten und Schulen gelehrten Mathematik ist klassisch in diesem Sinn.[2]

Kehren wir zur materialen Implikation zurück! Legen wir das Zweiwertigkeits- und Extensionalitätsprinzip zugrunde und soll daher der Wahrheitswert von "Wenn A, dann B" nur von den Wahrheitswerten von A und B abhängen, so bleibt von den 16 Möglichkeiten, in den vier Zeilen von (1) unter ($A \to B$) W und F zu verteilen, nur diese eine übrig, die einigermaßen dem "wenn - dann", wie es der Mathematiker gebraucht, entspricht - man kann eben nicht erwarten, daß irgendein *Sinn*zusammenhang zwischen A und B besteht. Trotz dieser ganz groben Vereinfachung ist die durch (1) *definierte* Implikation für die klassische Mathematik gerade die "richtige". Sie wurde übrigens schon von Philon v. Megara um 300 v. Chr. eingeführt, in der scholastischen Logik diskutiert (worauf noch die Bezeichnungen "verum ex quodlibet" für die 1. und 3. Zeile und "ex falso quodlibet" für die 3. und 4. Zeile von (1) hinweisen) und von G. Frege, dem Begründer der modernen Prädikatenlogik, 1879 für seine "Begriffsschrift"[3] neu entdeckt. Aber schon in der megarisch-stoischen Logik wurden andere Implikationsbegriffe entwickelt, so daß Kallimachos im 2. Jhdt.v.Chr. schreiben konnte: "Es krächzen selbst die Raben auf den Dächern, welche Implikationen richtig sind."[4] Angesichts der scholastischen Alternativen zur materialen Implikation hätten auch die mittelalterlichen Raben genügend Stoff zum Krächzen gehabt, und entsprechendes gilt, wie wir gleich sehen werden, auch für ihre neuzeitlichen Nachfahren. Der amerikanische Logiker und Philosoph C.I.Lewis hat ab 1912 versucht, einen anderen Implikationsbegriff *axiomatisch* festzulegen - nicht als Ersatz für die materiale Implikation (die er weiterhin benützt), sondern um den Sinn von "Es ist notwendig, daß B aus A folgt" zu treffen. Betrachten wir etwa die "Formeln"

(3) $A \vee (A \rightarrow B)$

(4) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

(5) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$

(6) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (wobei $\leftrightarrow$ für "genau dann, wenn" steht)

Wählt man für A und B beliebige (wahre oder falsche) Aussagen, so gehen diese Formeln in wahre Aussagen über - was etwas paradox anmutet. Führen wir $\Diamond A$ als Abkürzung für "Es ist möglich, daß A" ein und definieren wir eine "strikte" Implikation $(A \prec B)$ durch

(7) $(A \prec B)$ sei $\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$

("es ist unmöglich, daß A und nicht B"), so können wir wie Lewis nach Axiomen für $\Diamond$ suchen, aus denen einerseits (3) bis (6) mit $\prec$ statt $\rightarrow$ nicht ableitbar sind, wohl aber so "plausible" Formeln wie

(8) $(A \wedge (A \prec B)) \rightarrow B$

Lewis hat 5 verschiedene solche Axiomensysteme, die S1,...,S5 genannt werden, aufgestellt.[5] Wir geben S4 und S5 in einer Formulierung, die auf K. Gödel zurückgeht, und ein weiteres System T an und wählen als Grundbegriff "notwendig" (im Zeichen: $\Box$) statt "möglich" (letzteres definieren wir als "das Gegenteil ist nicht notwendig"). Die *Formeln unserer formalen Sprache* werden mithilfe der Symbole $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (für Aussagen), den Zeichen $\Box$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ sowie Klammern gemäß den folgenden Regeln gebildet:

(9.1) Jedes Aussagesymbol p_i $(i \in \mathbb{N})$ ist eine Formel.

(9.2) Ist A eine Formel, dann sind auch $\Box A$ und $\neg A$ Formeln.

(9.3) Sind A und B Formeln, dann auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \rightarrow B)$.

Wir führen dann folgende Abkürzungen ein:

$\Diamond A$ für $\neg\Box\neg A$, $(A \leftrightarrow B)$ für $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$, $(A \prec B)$ für $\Box(A \rightarrow B)$.

Wählt man für die Aussagensymbole in einer Formel A beliebig Aussagen (für gleiche Aussagensymbole sind natürlich gleiche Aussagen zu nehmen) und ergibt sich aus A für jede solche Wahl eine wahre Aussage, deren Wahrheitswert W sich allein mithilfe der Wahrheitstafeln (1) und (2) bestimmen läßt, so nennt man A eine *Tautologie*.

ır jene, die Genauigkeit lieben: Wir definieren "aussagenlogisch unzerlegbare ɜstandteile einer Formel A", kurz *aub*(A), rekursiv wie folgt:

$$aub(p_i) = \{p_i\};\ aub(\Box B) = \{\Box B\};\ aub(\neg B) = aub(B);$$

$$aub(B \wedge C) = aub(B \vee C) = aub(B \rightarrow C) = aub(B) \cup aub(C)$$

ıne "Belegung φ für A" sei eine Funktion von *aub*(A) in {W,F}. Wir setzen φ fort ıf die Menge aller Teilformeln von A mithilfe der folgenden rekursiven Definition:

$$\varphi B = \begin{cases} W & \text{wenn } \varphi B = F \\ F & \text{wenn } \varphi B = W \end{cases}$$

$$\varphi(B \wedge C) = \begin{cases} W & \text{wenn } \varphi B = W \ \textit{und}\ \varphi C = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi(B \vee C) = \begin{cases} W & \text{wenn } \varphi B = W \ \textit{oder}\ \varphi C = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi(B \rightarrow C) = \begin{cases} W & \text{wenn } \varphi B = F \text{ oder } \varphi C = W \\ F & \text{wenn } \varphi B = W \text{ und } \varphi C = F \end{cases}$$

.lt dann φA = W für jede Belegung φ für A, so heißt A Tautologie.]

ı wir die klassische Aussagenlogik (und insbesonders die materiale Implikation) ɜibehalten und erweitern wollen, wählen wir als *Axiome* zunächst der Einfachheit ılber gleich alle Tautologien. Welche speziellen Axiome bieten sich nun für $\Box$ an? .r wählen zunächst

.0) $\Box A \rightarrow A$

.1) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

.e uns plausibel zu sein scheinen. Wie stehts aber z.B. mit folgenden Formeln?

.2) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (15) $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$

.3) $A \rightarrow \Box\Diamond A$ (16) $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

.4) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ (17) $\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Diamond B)$

ı die Vorstellungen, die man mit dem Wort "notwendig" verbindet, vage und un- .nheitlich sind, wird man manchmal dazu neigen, die eine oder andere dieser ırmeln zu akzeptieren und ein anderes mal sie wieder zu verwerfen. Deshalb .t eben schon Lewis 5 Varianten angeboten! Um sein System S4 zu erhalten, nehmen .r als Axiome (10), (11) und (12); fügen wir noch (13) hinzu, bekommen wir S5; eiben wir bei (10) und (11), ergibt sich das System T.

Uns fehlen noch *Ableitungsregeln*. Da wir ein *logisches* Axiomensystem aufbauen wollen, in dem nur Formeln herleitbar sind, die notwendigerweise wahr sind, führen wir die sog. Necessierungsregel $\frac{A}{\Box A}$ neben der Abtrennungsregel $\frac{A \quad (A \rightarrow B)}{B}$ ein. Es stellt sich dann heraus, daß z.B. die Formeln

$$A \rightarrow \Diamond A, \quad \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B), \quad \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$$

in T herleitbar sind, in S4 die Formel $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$, in S5 die Formeln (14), (16) und (17), *nicht* aber (15) und $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$.

Da die Beantwortung der Frage, welche Axiome man akzeptieren möchte, von den oben erwähnten vagen und uneinheitlichen Vorstellungen von "notwendig" abhängt, hat man in Anschluß an Lewis im Lauf der Zeit weit mehr als hundert Systeme und Systemklassen entwickelt und untersucht, ihre Beziehungen zueinander betrachtet, sich überlegt, welche Gesetze für $\Box$ unter welchen Voraussetzungen (Axiomen) herleitbar sind (hätten Sie sofort gesehen, daß (17) in S5, nicht aber in S4 herleitbar ist?) und ob man Verfahren finden kann, die es zu entscheiden gestatten, ob eine beliebig vorgelegte Formel in einem bestimmten System abgeleitet werden kann. Für eine zunehmende Heiserkeit der Raben war gesorgt.

Die Situation änderte sich grundlegend um 1960, als es mehreren Logikern unabhängig voneinander gelang, eine präzisere Semantik (d.h. eine genauere Interpretation von $\Box$) für unsere formale Sprache zu entwickeln. Schon 1947 hat R. Carnap Ansätze in dieser Richtung gemacht und 1957 hat S. Kanger den wesentlichen Fortschritt, der jedoch zuwenig Beachtung fand, erzielt; der eigentliche Durchbruch gelang S. Kripke in mehreren Arbeiten aus den Jahren 1959 bis 1963. Die Grundidee geht auf Leibniz zurück: Eine Aussage ist notwendigerweise wahr, wenn sie in allen möglichen Welten wahr ist. Was aber ist eine mögliche Welt? Betrachten wir etwa folgende Aussagen:

> Der Planet Venus hat keinen Mond.
> Napoleon hat die Schlacht von Waterloo verloren.
> Im April 1982 findet eine Lehrerfortbildungstagung in Wien statt.

Diese Aussagen sind zwar wahr, aber nicht notwendigerweise wahr - wir können uns vorstellen, daß die Venus sich einen Planetoiden als Mond einfängt, Napoleon die Schlacht von Waterloo gewonnen hat[6] und die fragliche Lehrerfortbildungstagung in einem anderen Monat stattfindet. (Es geht hier natürlich nicht darum, inwieweit unsere Welt determiniert ist, sondern um die *logische* Möglichkeit - ob sich ein logischer Widerspruch ergibt, wenn wir annehmen, die eine oder andere dieser Aussagen sei falsch.) Wir können uns die reale Welt durch eine Menge M von solchen

Aussagen, die in ihr wahr sind, beschrieben denken; wir können weiters voraussetzen, daß die Aussagen in M logisch voneinander unabhängig sind (wir werfen solche, die aus anderen logisch folgen, einfach hinaus). Ersetzen wir nun keine, einige oder auch alle Aussagen aus M durch ihre Negation, so erhalten wir die Beschreibung einer"möglichen Welt". Ist eine Menge M von Aussagen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ gegeben (die Beschränkung auf abzählbar unendlich viele ist unwesentlich), wobei keine aus den übrigen logisch folgt, so beschreibt jede Teilmenge α von M diejenige mögliche Welt, in der alle Aussagen aus α wahr und die aus $M\backslash\alpha$ falsch sind. Wir identifizieren zunächst einmal der Einfachheit wegen eine mögliche Welt mit ihrer Beschreibung α und definieren nun eine zweistellige Funktion φ, die jeder Formel A unserer formalen Sprache und jeder möglichen Welt α einen Wahrheitswert $\varphi(A,\alpha)$ zuordnet; $\varphi(A,\alpha) = W$ soll ausdrücken: "A ist in der möglichen Welt α wahr". Ist A ein Aussagensymbol p_i, so setzen wir natürlich

$$\varphi(p_i,\alpha) = \begin{cases} W & \text{wenn } p_i \in \alpha \\ F & \text{wenn } p_i \notin \alpha \end{cases}$$

Ist A von der Gestalt $\neg B$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ oder $(B \rightarrow C)$ und sind $\varphi(B,\alpha)$ und $\varphi(C,\alpha)$ gegeben, so wird $\varphi(A,\alpha)$ mittels Wahrheitstafel definiert. So gilt z.B.

$$\varphi(\neg B,\alpha) = \begin{cases} W & \text{wenn } \varphi(B,\alpha) = F \\ F & \text{wenn } \varphi(B,\alpha) = W \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$\varphi(B,\alpha)$	$\varphi(\neg B,\alpha)$
W	F
F	W

Von besonderem Interesse ist nun natürlich der Fall, wo A von der Gestalt $\Box B$ ist. Entsprechend der Leibnizschen Idee setzen wir:

$$\varphi(\Box B,\alpha) = \begin{cases} W & \text{wenn } \varphi(B,\beta) = W \text{ für alle } \beta \subset M \\ F & \text{wenn } \varphi(B,\beta) = F \text{ für ein } \beta \subset M \end{cases}$$

Nennen wir eine Formel A nun *modallogisch allgemeingültig*, wenn stets $\varphi(A,\alpha) = W$ gilt, so lassen sich die beiden folgenden Sätze beweisen:

Adäquatheitssatz für S5. Jede in S5 herleitbare Formel ist modallogisch allgemeingültig.

Vollständigkeitssatz für S5. Jede modallogisch allgemeingültige Formel ist in S5 herleitbar.

(Der Beweis des ersten dieser beiden Sätze erfolgt durch sog. Herleitungsinduktion, der Beweis des zweiten Satzes ist etwas verwickelter.) Damit haben wir für das System S5 eine "angemessene" Semantik gefunden: Die in S5 herleitbaren Formeln bringen gerade jene logischen Gesetze zum Ausdruck, die für den Leibnizschen Notwendigkeitsbegriff gelten.

Können wir auch für die anderen bisher entwickelten Modalsysteme wie T und S4 eine solche angemessene Semantik angeben? Dazu kehren wir zu unseren heuristischen Vorbetrachtungen über mögliche Welten zurück: Wenn wir uns den Zustand unserer Welt zu bestimmten Zeitpunkten durch Aussagen beschrieben denken, so ist etwa jetzt die Aussage "Napoleon hat die Schlacht von Waterloo verloren" wahr und es ist nicht möglich, daß diese Aussage zu einem späteren Zeitpunkt falsch ist - egal, wie sich unsere Welt ab jetzt weiter entwickelt. Zum Jahresanfang 1815 war aber eine Entwicklung möglich, die zu einem Sieg Napoleons bei Waterloo geführt hätte. Ein Zustand unserer Welt, in dem Napoleon Sieger von Waterloo ist, ist somit relativ möglich zum Zustand unserer Welt bei Jahresbeginn 1815, jedoch nicht möglich relativ zum jetzigen Weltzustand. Wir stellen uns daher nun unter möglichen Welten Zustände im Laufe möglicher Entwicklungen vor, und manche dieser Zustände können zueinander in der Relation der "relativen Möglichkeit" stehen. (Wem die Physik lieber als die Geschichte ist, der denke an physikalische Zustände, die relativ zu bestimmten Anfangszuständen möglich sind.) Wiederum kommt es uns natürlich nicht darauf an, was diese möglichen Welten sind - wir gehen einfach von einer nicht leeren Menge W aus, deren Elemente wir "mögliche Welten" nennen, und auf der eine zweistellige Relation R definiert ist. Gibt es weiters noch eine Funktion φ, die jedem p_i und jedem $\alpha \in W$ einen Wahrheitswert $\varphi(p_i,\alpha)$ zuordnet, so nennen wir das Tripel $\langle W,R,\varphi\rangle$ ein *Kripkemodell*. Wir definieren dann $\varphi(A,\alpha)$ für beliebige Formeln A rekursiv wie folgt: Ist A von der Gestalt $\neg B$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ oder $(B \rightarrow C)$ und sind $\varphi(B,\alpha)$ und $\varphi(C,\alpha)$ gegeben, so wird $\varphi(A,\alpha)$ mittels Wahrheitstafel definiert; ist A von der Gestalt $\Box B$, so sei

$$\varphi(\Box B,\alpha)=\begin{cases} W \text{ wenn } \forall\beta(\text{Aus } \alpha R\beta \text{ folgt } \varphi(B,\beta) = W) \\ F \text{ wenn } \exists\beta(\alpha R\beta \text{ und } \varphi(B,\beta) = F) \end{cases}$$

Wir nennen A gültig in $\langle W,R,\varphi\rangle$, wenn $\varphi(A,\alpha) = W$ für alle $\alpha \in W$ gilt. Es läßt sich dann zeigen:

$\Box(A\rightarrow B) \rightarrow (\Box A\rightarrow \Box B)$ ist in allen Kripkemodellen gültig.
$\Box A \rightarrow A$ ist in allen Kripkemodellen gültig, wo R reflexiv ist.
$\Box A \rightarrow \Box\Box A$ ist in allen Kripkemodellen gültig, wo R transitiv ist.
$A \rightarrow \Box\Diamond A$ ist in allen Kripkemodellen gültig, wo R symmetrisch ist.

$\neg\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ ist in allen Kripkemodellen gültig, wo R lokal konvex ist (d.h., ist $\alpha R \beta$ und $\alpha' R\gamma$, so gibt es ein δ mit $\beta R'\delta$ und $\gamma R\delta$)

$\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) \rightarrow A$ ist in allen Kripkemodellen gültig, wo R eine terminale Ordnungsrelation ist (d.h., R ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und es gibt keine unendliche Folge $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_i R\alpha_{i+1}$ und $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$).

$\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ ist in allen Kripkemodellen gültig, wo R irreflexiv, transitiv und terminal (eine irreflexive terminale Ordnung) ist.

Es entsprechen somit bestimmten Formeln bestimmte Eigenschaften von R! Es läßt sich aber zeigen, daß es *keine* Formel gibt, die die Irreflexivität von R ausdrückt, und daß manche Formeln wie z.B. die beiden letzten keinen Eigenschaften von R entsprechen, die man auf der ersten Stufe definieren kann - d.h. nur mithilfe von Quantoren für Elemente aus W und Junktoren (um "terminal" zu definieren, benötigt man einen Quantor für Teilmengen von W; solche Eigenschaften "zweiter Stufe" sind komplizierter). Dies sind nur zwei einfache Beispiele aus einer Fülle interessanter logischer Probleme, die sich hier ergeben. Für die Systeme T und S4 gelten nun:

Adäquatheitssatz für T *bzw.* S4. Jede in T bzw. S4 herleitbare Formel ist in allen Kripkemodellen gültig, in denen R reflexiv bzw. reflexiv und transitiv ist.

Vollständigkeitssatz für T *bzw.* S4. Jede Formel, die in allen Kripkemodellen mit reflexivem bzw. reflexivem und transitivem R gültig ist, ist in T bzw. S4 herleitbar. (Wiederum ist der erste dieser beiden Sätze relativ einfach durch Herleitungsinduktion zu beweisen, während der Beweis des zweiten Satzes etwas anspruchsvoller ist.) Für S5 ergibt sich ein weiteres solches Satzpaar, wenn man Kripkemodelle betrachtet, in denen R eine Äquivalenzrelation ist.

Im Anschluß an diese Beziehungen zwischen Syntax (Formeln, Systeme) und Semantik (Kripkemodelle) konnten zahlreiche weitere Untersuchungen angestellt, viele Fragen geklärt und neue aufgeworfen werden. So konnte man z.B. "unvollständige" Systeme angeben, die sich durch keine Klasse von Kripkemodellen semantisch charakterisieren lassen. Unter Verwendung einer geeigneten allgemeinen Definition eines modallogischen Systems konnte der Verband der Modallogiken betrachtet und so eine Theorie der aussagenlogischen Modalsysteme entwickelt werden[7].

Wir haben bisher nur von der modalen Aussagenlogik gesprochen. Schon in der antiken und scholastischen Zeit hat man aber modale Logik auch mit Quantorenlogik kombiniert. In der modernen Logik war dies vor 1967 nur vereinzelt der Fall; seither aber wurden auch die relativ komplizierte *modale Prädikatenlogik* und sogar die modale Typentheorie ausgebaut und untersucht; dabei gelang es, den schwierigen Begriff der *Intension* in präziser Weise wenigstens partiell zu erfassen und somit auch für jene Bereiche ein logisches Werkzeug zur Verfügung zu stellen, wo das

Extensionalitätsprinzip eine zu grobe Vereinfachung darstellt. (Man spricht daher hier auch von *intensionaler Logik* im Unterschied zu klassischen.) So spielt die modale Typenlogik z.B. in der Linguistik im Rahmen moderner Grammatiktheorien eine wichtige Rolle.[8]

Während diese intensionale Logik eine Ergänzung und Verfeinerung der klassischen Logik darstellt, entwickelte der auf Brouwer zurückgehende *Intuitionismus* eine Alternative zur klassischen Logik. Wie eingangs schon angedeutet, spielt hier nicht die Wahrheit bzw. Falschheit, sondern die Beweisbarkeit bzw. Widerlegbarkeit mathematischer Aussagen die tragende Rolle. Es gibt ja zahlreiche einfach formulierbare mathematische Aussagen, die zu beweisen oder zu widerlegen man sich seit Jahrhunderten erfolglos bemüht - z.B., ob es unendlich viele Primzahlzwillinge oder Primzahlen der Form n^2+1 gibt, ob alle vollkommenen Zahlen gerade sind, die Fermatsche oder Goldbachsche Vermutung. Betrachten wir etwa die letztere: Warum sollten wir eigentlich annehmen, daß sie beweisbar oder widerlegbar ist? Für einen Beweis würden wir ein allgemeines zahlentheoretisches Gesetz benötigen, aufgrund dessen sich zeigen läßt: Jede gerade Zahl $\geqslant 4$ ist Summe zweier Primzahlen. Für eine Widerlegung brauchen wir ein Gegenbeispiel. Aber es könnte ja sein, daß "zufällig" alle geraden Zahlen $\geqslant 4$ Summe zweier Primzahlen sind, ohne daß dies aufgrund eines allgemeinen zahlentheoretischen Gesetzes oder Axioms der Fall ist, und wobei dann natürlich kein Gegenbeispiel existiert; jemand, der unendlich viel Zeit und Papier hat, könnte alle geraden Zahlen durchgehen und feststellen, daß Goldbachs Vermutung stimmt - aber für uns, da wir nur endliche Beweise führen können, ist die Alternative "beweisbar oder widerlegbar" in diesem Fall nicht vollständig. Es gibt aber dann auch keinen Grund anzunehmen, daß ein Satz beweisbar oder beweisbarerweise unbeweisbar ist - wie es in Hilberts optimistischen klassischen Ausspruch steckt: "In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!" (Hilbert sah auch den Beweis der Unlösbarkeit eines Problems als Lösung an.) Kehren wir nun zum System S4 zurück! Lesen wir $\Box$ ganz naiv als "beweisbar", dann gehen die Axiome

$$\Box A \to A \qquad \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \qquad \Box A \to \Box\Box A$$

in intuitiv "wahre" Formeln über, und auch die Necessierungsregel ist bei dieser Interpretation plausibel (Ist A hergeleitet, so gibt es einen Beweis von A, also $\Box A$). Ersetzen wir nun die Behauptung der Wahrheit einer Aussage durch die Behauptung ihrer Beweisbarkeit und fassen wir auch die Junktoren in diesem Sinn auf (sie liefern wieder Beweisbarkeitsbehauptungen), so können wir dies im Rahmen von S4 dadurch explizit ausdrücken, daß wir jeder aussagenlogischen Formel A eine modallogische Formel A^* induktiv folgendermaßen zuordnen:

p_i^* sei $\Box p_i$; $(\neg B)^*$ sei $\Box\neg B^*$;

$(B \circ C)^*$ sei $\Box(B^* \circ C^*)$, wobei o für $\wedge, \vee$ und $\rightarrow$ steht

(A^* entsteht somit aus A, indem man vor jede Teilformel von A ein $\Box$ setzt.) Wir interessieren uns nun für jene Formeln A, für die A^* in S4 herleitbar ist. Betrachten wir etwa $(p_i \vee \neg p_i)^*$, also $\Box(\Box p_i \vee \Box\neg\Box p_i)$ ("Man kann beweisen, daß p_i beweisbar oder beweisbarerweise unbeweisbar ist" - Hilberts non-Ignorabimus!): es ist in S4 nicht herleitbar! Gleiches gilt für $(\neg\neg p_i \rightarrow p_i)^*$ und $(p_i \vee (p_i \rightarrow p_j))^*$ für $i \neq j$. Hingegen ist $(p_i \rightarrow \neg\neg p_i)^*$ und $(\neg(p_i \wedge \neg p_i))^*$ in S4 herleitbar. Es ist daher bei dieser Beweisbarkeitsinterpretation von S4 naheliegend zu vermuten, daß hier ein Zusammenhang mit der intuitionistischen Logik besteht. Ein Axiomensystem für diese Logik wurde erstmals von A. Heyting 1930 angegeben; es läßt sich nun zeigen, was Gödel schon 1933 ohne Beweis formuliert hat: Eine Formel A ist in der intuitionistischen Logik genau dann herleitbar, wenn A^* in S4 herleitbar ist. (Dieser Satz gilt auch für die Prädikatenlogik.) Damit haben wir nicht nur eine plausible Interpretation für die intuitionistische Logik gefunden - wir können auch die präzisere Kripke-Semantik von S4 auf diese Logik übertragen! Intuitiv kann man sich hier unter "möglichen Welten" mögliche Entwicklungsstadien einer Wissenschaft vorstellen (d.h. mögliche Anhäufungen des Wissens in Form von Aussagen: man identifiziere ein solches Entwicklungsstadium mit der Menge der in ihm als wahr bekannten Aussagen). R ist die zeitliche Ordnung dieser Stadien und $\varphi(A,\alpha) = W$ drückt aus, daß A in α als wahr bekannt ist. ($\varphi(A,\alpha) = F$ besagt dann, daß A in α (noch) nicht als wahr bekannt ist.) Die Formeln der intuitionistischen Logik sind dann gerade jene, deren Wahrheit bei allen möglichen Entwicklungen von vornherein feststeht. Es gilt somit auch hier ein Adäquatheits- und Vollständigkeitssatz, der sich auch auf die Prädikatenlogik ausdehnen läßt.

Daß es zu jedem mathematischen Axiomensystem von hinreichender Stärke (dies kann präzisiert werden) einschlägige Sätze gibt, die aufgrund der Axiome weder beweisbar noch widerlegbar sind, ist gerade der Inhalt des ersten *Gödelschen Unvollständigkeitssatzes* (1931). Gödel geht von einer Version des Peanoschen Axiomensystems für die natürlichen Zahlen aus und ordnet jeder Formel und Formelfolge mithilfe der Primfaktorzerlegung umkehrbar eindeutig und in berechenbarer Weise natürliche Zahlen zu, die man "Gödelnummern" der betreffenden Formel(folge)n nennt. Mit einigem Aufwand, der dem Gödelschen Beweis den Ruf der Kompliziertheit eingetragen hat, kann man zeigen, daß man die Relation "n ist die Gödelnummer eines Beweises der Formel mit der Gödelnummer m" durch eine zahlentheoretische Formel (in der Sprache des Peanoschen Axiomensystems) repräsentieren kann (Beweise kann man als spzielle Formelfolgen auffassen); wir kürzen diese Formel durch *Bew*(n,m) ab.

Dann drückt die Formel $\exists x\, Bew(x,m)$ im Peanoschen System aus, daß die Formel mit der Nummer m beweisbar ist. Welche "Gesetze" gelten für dieses "Beweisbarkeitsprädikat"? Es sei ψ eine Abbildung, die jeder Formel der modalen Aussagenlogik eine Formel des Peanoschen Axiomensystems zuordnet, wobei gilt:

$\psi(p_i)$ sei eine zahlentheoretische Aussage, aufgefaßt als Formel im Peanoschen System;

$\psi(\neg A)$ sei $\neg\psi(A)$, $\psi(A \circ B)$ sei $\psi(A) \circ \psi(B)$, wo $\circ$ für $\wedge, \vee$ und $\rightarrow$ steht

$\psi(\Box A)$ sei $\exists x Bew(x, g(A))$ wo $g(A)$ die Gödelnummer von A ist (genauer: deren Ziffer).

Es konnte nun Solovay 1976 zeigen, daß eine Formel A genau dann in einem bestimmten modallogischen System G herleitbar ist, wenn für jede solche Abbildung ψ die Formel $\psi(A)$ in Peanos Axiomensystem beweisbar ist. Dieses (nach Gödel so benannte) System G hat als Axiome neben den klassischen Tautologien

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B) \qquad \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$$

(und als Regeln die Necessierungs- und Abtrennungsregel). Dabei drückt das zweite dieser beiden Axiome den sog. *Satz von Löb* aus, der als eine Verallgemeinerung der beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze angesehen werden kann; auch Gödels Sätze kann man in G ausdrücken und Teile des Gödelschen Beweises haben ihre Entsprechung im System G (so etwa das sog. Diagonallemma, das in Beziehung steht zum Bethschen Definierbarkeitssatz für G). Weiters ist hier von Interesse, daß G entscheidbar ist und durch Kripkmodelle, bei denen R eine irreflexive terminale Ordnung ist, vollständig charkatierisiert werden kann.[9]
Kehren wir nochmals zum System S4 zurück! Man kann das Axiom (11) auch ersetzen durch die Formel

$$\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$$

Bekanntlich entspricht die klassische Aussagenlogik der Booleschen Algebra; interpretieren wir $\Box$ als Kernoperator, so besteht eine analoge Beziehung zwischen S4 und topologischen Booleschen Algebren.[10]

Diese kurze Vorstellung der Modallogik mußte sich naturgemäß auf einige wenige relativ einfache Punkte beschränken. Ich hoffe dennoch, daß ich Ihnen ein Bild von der dynamischen Entwicklung und der lebendigen Vielfalt dieser logischen Disziplin vermitteln konnte. Aus der Analyse des Notwendigkeitsbegriffes ergaben sich Berührungspunkte mit Grammatiktheorien, Intuitionismus, Beweistheorie, Topologie - von der Philosophie und der Verwandtschaft mit der deontischen und juristischen Logik ganz zu schweigen (in manchen Systemen der Modallogik kann $\Box$ als "geboten" und $\Diamond$ als "erlaubt" gelesen werden). Die klassische Prädikatenlogik kombiniert Einfachheit mit weitreichenden nichttrivialen Anwendungsmöglichkeiten und reicht für den Aufbau der klassischen Mathematik zwar völlig aus, doch ergeben sich auch hier, wie wir am Beispiel des Systems G und der topologischen Interpretation von S4 gesehen haben, unerwartete Querverbindungen zur Modallogik. Darüber hinaus gibt es, unabhängig von jeder Anwendung, in diesem Teil der Logik eine Fülle interessanter logischer Probleme.[11]

Anmerkungen

1 Im 3. Band des Oberstufen-AHS-Lehrbuches Laub (1980) wird, im Gegensatz zum 1. Band, Laub (1978), S.4, und zu Bürger/Fischer/Malle (1980), die materiale Implikation "Subjunktion" genannt und mit "Implikation" eine tautologische Subjunktion bezeichnet - ein Sprachgebrauch, der in der internationalen logischen Literatur wenig üblich ist und sich hier in ähnlicher Weise nur bei Lorenzen und seinen Schülern findet. Übrigens ist der Hinweis, die Bindewörter "wenn - so" würden in der Umgangssprache kausal verwendet, wobei der Vordersatz die Ursache sei (gemeint ist wohl: ausdrückt) und der Hintersatz die Folge (beschreibt), in dieser Allgemeinheit nicht ganz zutreffend. "Wenn ich ein Vöglein wär' ..." Das Vogelsein ist zweifellos nicht die Ursache, zur geliebten Person zu fliegen, sondern eine hiefür günstige Bedingung. Ganz allgemein ist festzustellen, daß die Wahrheitstafelmethode für die Logik untypisch und geeignet ist, einen ziemlich irreführenden Eindruck von dieser Wissenschaft zu vermitteln.

2 Insbesonders findet sich in den genannten AHS-Lehrbüchern nur klassische Mathematik und kein Hinweis auf mögliche Alternativen. (Im 3. Heft des IV. Teiles von Laub (1976) gab es auf S. 1 f noch einige Andeutungen.) An prominenten Mathematikern, die außerhalb der eigentlichen intuitionistischen Schule einen nichtklassischen Standpunkt vertreten haben, seien etwa Kronecker, Poincaré und H.Weyl genannt.

3 G. Frege (1879) stellt nach Boole den ersten Höhepunkt in der Entwicklung der modernen Logik dar. In weiteren Werken versuchte Frege, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen ("Logizismus").

4 Bochenski (1970), S. 134 f.

5 Vgl. Lewis/Langford (1932). Eine einführende modernere Darstellung der Lewis'schen und anderer Systeme findet man in Hughes/Cresswell (1968).

6 Vgl. Stefan Zweigs "Sternstunden der Menschheit".

7 Vgl. dazu Chellas (1980) und Rautenberg (1979).

8 Vgl. dazu Link (1979) und Gallin (1975). Zur Interpretation des "Wenn - dann" in irrealen Konditionalsätzen im Sinne der Kripkesemantik vgl. Lewis (1973).

9 Vgl. etwa Boolos (1979). Eine weitere kalkültheoretische Interpretation eines Modaloperators findet man - neben einer epistemischen und einer sachverhaltstheoretischen - in Christian (1972), S. 141 ff.

10 Vgl. dazu etwa Rasiowa/Sikorski (1968), Schütte (1968).

11 Als erste Einführung in die Modallogik eignet sich Hughes/Cresswell (1968) (deutsche Übersetzung bei Walter de Gruyter). Weiter führen - allerdings nur im Rahmen der Aussagenlogik - Chellas (1980) und, etwas anspruchsvoller, Rautenberg (1979); das erste behandelt auch deontische Logik, das zweite auch mehrwertige und intuitionistische Logik. Schütte (1968) bringt vor allem intuitionistische und modale Prädikatenlogik auf der Basis von T und S4. Die Auffassung des quantorenlogischen Modalkalküls als formale Theorie (und nicht als Teil der Logik) findet man in Christian (1972), wo sie auch als Ausgangspunkt der Entwicklung einer Prädikatoidenlogik dient.

Literaturangaben

Bochenski, I.M. (1970): *Formale Logik*. 3. Aufl. Alber Freiburg/München.

Boolos, G. (1979): *The unprovability of consistency. An essay in modal logic.* Cambridge University Press.

Bürger H./Fischer R./Malle G. (1980): *Mathematik Oberstufe 3*. Hölder-Pichler-Tempsky Wien.

Chellas, B.F.(1980): *Modal Logic. An introduction*. Cambridge University Press.

Christian, C. (1972): Modalkalkül als formale Theorie und das Problem einer Prädikatoidenlogik. *Philosophia naturalis* Bd. 13, Heft 2, S. 113 - 156.

Frege, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag L. Nebert, Halle. Neu herausgegeben von I. Angelelli 1964 bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt.

Gallin, D. (1975): *Intensional and higher-order modal logic, with applications to Montague Semantics*. North Holland Publ. Co. Amsterdam.

Hughes G.E./Cresswell M.J. (1968): *An Introduction to Modal Logic*. Methuen London. Deutsche Übersetzung bei Walter de Gruyter.

Laub J. (Hrsg.): *Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen*. Hölder-Pichler-Tempsky Wien.
(1976) IV. Teil für die 8. Klasse, 3. Heft.
(1978) 1. Band, Arbeitsbuch für die 5. Klasse.
(1980) 3. Band, Arbeitsbuch für die 7. Klasse.

Lewis C.I./Langford H.C. (1932): *Symbolic logic*. 2nd Ed. Dover publications, New York.

Lewis D. (1973): *Counterfactuals*. Blackwell Oxford.

Link G. (1979): *Montague-Grammatik. Die logischen Grundlagen*. Wilhelm Fink Verlag München.

Rasiowa H./Sikorski R. (1968): *The Mathematics of Metamathematics*. 2. Aufl. Warszawa.

Rautenberg W. (1979): *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Vieweg Braunschweig/Wiesbaden.

Schütte K. (1968): *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*. Springerverlag.